



# Modélisation RF d'une cavité accélératrice supraconductrice

J.L. Biarotte

## ► To cite this version:

| J.L. Biarotte. Modélisation RF d'une cavité accélératrice supraconductrice. 2007. in2p3-00158021

**HAL Id: in2p3-00158021**

**<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00158021>**

Submitted on 28 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Modélisation RF d'une cavité accélératrice supraconductrice**

J-Luc Biarrotte, IPN Orsay, Juin 2007

[biarrott@ipno.in2p3.fr](mailto:biarrott@ipno.in2p3.fr)

## **Résumé**

Cette note décrit comment modéliser simplement le comportement d'une cavité accélératrice supraconductrice couplée avec son environnement RF et le faisceau qu'elle accélère. Les équations régissant le comportement du système au premier ordre sont décrites, et quelques propriétés remarquables du système en régime stationnaire sont notamment soulignées.



# Modélisation RF d'une cavité accélératrice supraconductrice

J-Luc Biarrotte, IPN Orsay

## 1 Equation du système « cavité couplée »

Une cavité accélératrice supraconductrice développe un champ électromagnétique résonant, généralement sur le mode  $TM_{010-\pi}$ , permettant de produire sur son axe faisceau une tension accélératrice. L'équation régissant le comportement d'une telle cavité en présence de faisceau et de son environnement RF peut se mettre au 1<sup>er</sup> ordre, par analogie avec un circuit RLC, sous la forme suivante\* [1] :

$$(1) \quad \boxed{\frac{d\tilde{V}_C(t)}{dt} = \frac{\omega (r/Q)}{4} (2\tilde{I}_G(t) + \tilde{I}_B(t)) - \frac{\omega (1 - j \tan \psi)}{2 Q_L} \tilde{V}_C(t)}$$

### 1.1 La tension accélératrice $V_C$

- $\tilde{V}_C$  représente, dans l'espace complexe, la tension accélératrice développée par la cavité le long de son axe faisceau ; il s'agit bien entendu ici de la composante basse fréquence de cette tension, qui oscille à la pulsation RF de fonctionnement  $\omega = 2\pi f$  ( $\tilde{V}_C e^{j\omega t}$ ) fixée par le générateur RF.
- L'amplitude de  $\tilde{V}_C$  est définie comme la tension accélératrice maximale agissant sur une particule de vitesse réduite  $\beta$  traversant la cavité (le facteur de temps de transit est inclus) ; elle est directement liée à la composante longitudinale du champ électrique  $E_z$  sur l'axe faisceau ( $z$ ), et vaut<sup>†</sup> :

$$V_C = |\tilde{V}_C| = \left| \int_0^L E_z(z) e^{j\omega z/\beta c} dz \right|, \text{ où } L \text{ est la longueur totale de la cavité.}$$

---

\* Cette forme n'est valable que dans l'approximation  $Q_L \gg 1$  (cavité faiblement couplée), et  $\omega \approx \omega_{cav}$  (fréquence de fonctionnement très proche de la fréquence propre de la cavité) ; on suppose aussi que les variations de la fréquence cavité et des courants  $I_G$  et  $I_B$  sont très lents par comparaison à la fréquence de fonctionnement RF.

† En supposant que la variation de vitesse de la particule est négligeable à la traversée de la cavité ( $\delta\beta \ll \beta$ )

Cette tension accélératrice est dépendante de la vitesse du faisceau incident ; elle est maximale pour un faisceau de vitesse  $\beta_0$ , appelé « bêta optimal »\*. On définit aussi le champ accélérateur, également dépendant de  $\beta$ , par  $E_{acc} = V_C / L_{acc}$ , où  $L_{acc}$  est la longueur accélératrice de la cavité, définie le plus souvent comme étant égale à  $L_{acc} = N \beta_0 \lambda / 2$ , où  $N$  est le nombre de cellules de la cavité, et  $\lambda$  la longueur d'onde RF ( $=c/f$ ).

La valeur du champ de fonctionnement dans une cavité supraconductrice est généralement choisie pour assurer que les champs de surface (électrique  $E_{pk}$  et magnétique  $B_{pk}$ ) dans la cavité ne dépassent pas certaines valeurs maximales. Sachant que les rapports  $E_{pk}/E_{acc}$  et  $B_{pk}/E_{acc}$  sont des paramètres ne dépendant, à  $\beta$  donné, que de la géométrie de la cavité, il vient que la tension accélératrice de fonctionnement est spécifiée, selon les cas, par :

$$V_{C \text{ fonct}} = \left( \frac{L_{acc}}{E_{pk}/E_{acc}} \right) E_{pk \text{ fonct}} \quad \text{ou} \quad V_{C \text{ fonct}} = \left( \frac{L_{acc}}{B_{pk}/E_{acc}} \right) B_{pk \text{ fonct}}$$

- La phase de  $\tilde{V}_C$ , notée  $\varphi_C = \arg(\tilde{V}_C)$ , doit être rapportée à une phase de référence. On choisit par commodité de définir la phase de référence comme étant la phase de  $\tilde{V}_C$  fournissant l'accélération optimale (« on-crest »). En considérant que la cavité est un « gap » ponctuel, on se ramène alors au cas  $\varphi_C = \Phi_S$ , où  $\Phi_S$  représente la phase synchrone utilisée dans les calculs de dynamique faisceau. Le gain d'énergie d'une particule (de charge  $q$ ) lors sa traversée de la cavité est alors simplement donnée par  $\Delta W = q V_C \cos \varphi_C$ .

## 1.2 Fréquence de fonctionnement $\omega$ et angle de déphasage $\psi$

- Si  $f_0$  est la fréquence propre de la cavité, la fréquence de résonance du système « cavité couplée » est donnée par :

$$f_{cav} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4 Q_L^2}}$$

où  $Q_L$  est le facteur de qualité du système, défini comme le rapport entre l'énergie stockée et la puissance dissipée dans le système par cycle RF<sup>†</sup>. Dans l'approximation  $Q_L \gg 1$ , valable dans notre cas, il vient que  $f_{cav} \approx f_0$ .

- Lorsque le système de la cavité couplée ne fonctionne pas à sa fréquence de résonance  $f_{cav}$ , mais à une fréquence  $f = \omega / 2\pi$ , un déphasage est introduit entre un courant d'excitation donné et la tension associée induite dans la cavité. Ce déphasage, noté  $\psi$ , est l'angle de déphasage propre (« tuning angle ») de la cavité, qui vaut :

$$\tan \psi = Q_L \left( \frac{f_{cav}}{f} - \frac{f}{f_{cav}} \right) \cong 2Q_L \left( \frac{f_{cav} - f}{f} \right) \quad \text{dans l'approximation } f \approx f_{cav}$$

\* Le bêta optimal n'existe que pour une cavité possédant au moins 2 cellules accélératrices (sinon, il vaut 1).

† De façon générale,  $Q = \omega_0 U / P$ , où  $U$  est l'énergie stockée et  $P$  la puissance dissipée dans le système.

- De plus, dans le cas de nos cavités supraconductrices à fort  $Q_L$ , la bande passante du système est très faible (égale à  $f_{cav}/Q_L$ ), et la moindre perturbation de la fréquence de la cavité va induire une variation non négligeable de l'angle de déphasage  $\psi$ . Il convient donc de modéliser au mieux ces perturbations de fréquence, d'origine mécanique. La fréquence de résonance de la cavité  $f_{cav}(t)$  peut s'exprimer comme :

$$(2) \quad f_{cav}(t) = f + \Delta f_L(t) + \Delta f_{SAF}(t) + \sum_i \Delta f_{MIC_i}(t) \sin(2\pi f_{MIC_i} t)$$

$\Delta f_{SAF}(t)$  représente le « detuning », par rapport à la fréquence de fonctionnement  $f$ , induit en agissant sur le système d'accord à froid de la cavité\*. Les termes  $f_{MIC}$  et  $\Delta f_{MIC}(t)$  représentent respectivement les fréquences et amplitudes des perturbations excitatrices d'ordre microphonique† (vibrations mécaniques des structures, fluctuations de la pression du bain d'hélium...). Enfin,  $\Delta f_L(t)$  représente le detuning induit par les forces de Lorentz agissant sur les parois de la cavité ; nous utiliserons pour modéliser ce detuning le modèle au 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$\frac{d \Delta f_L(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m} \left( -\Delta f_L(t) + \frac{10^{-12} k_L}{L_{acc}^2} V_C^2(t) \right),$$

où  $\tau_m$  est la constante d'amortissement mécanique de la cavité, et  $k_L$  est le facteur de Lorentz de la cavité, en Hz/(MV/m)<sup>2</sup>.

### 1.3 Facteur de qualité $Q_L$

- Plusieurs contributions dans notre cas participent au facteur de qualité  $Q_L$  de la cavité couplée : le facteur de qualité  $Q_0$  de la cavité elle-même, et les facteurs de qualité de chacun des couplages, incident ( $Q_i$ ) et transmis ( $Q_t$ ). On obtient ainsi :

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_i} + \frac{1}{Q_t}$$

- Le  $Q_0$  de la cavité est indépendant du champ accélérateur, et peut s'écrire  $Q_0 = G/R_S$ , où  $G$  est le facteur de forme de la cavité, et  $R_S$  la résistance de surface du matériau utilisé. Dans le cas du niobium supraconducteur et dans l'approximation  $T < T_C / 2$ , cette résistance vaut environ, en ohms :

$$R_S = R_{res} + 9.10^{-23} \frac{f^2}{T} e^{-1.83 \frac{T_C}{T}}$$

où  $T$  est la température de fonctionnement,  $T_C$  la température critique du niobium (9.2K),  $f$  la fréquence de fonctionnement, et  $R_{res}$  la résistance résiduelle quand  $T$  tend vers 0K. A fort champ cependant, certaines limitations (émission de champ, etc.) induisent la plupart du temps une dépendance du  $Q_0$  avec le champ accélérateur. Cette dépendance peut se modéliser sous la forme :

$$Q_0 = \frac{G}{R_S} (1 - A E_{acc}^n), \text{ où } A \text{ et } n \text{ sont des paramètres à ajuster (idéalement, } A=0\text{).}$$

\* On considérera dans un premier temps que ce detuning est constant, i.e. pas de rétroaction dynamique du SAF

† Plusieurs composantes sont ici superposées à différentes fréquences afin de modéliser au mieux les perturbations.

## 1.4 Les courants générateurs $I_B$ et $I_G$

- $\tilde{I}_B$  représente, toujours dans l'espace complexe, le courant induit dans la cavité par le faisceau, à la fréquence de travail (dépendance en  $e^{j\omega t}$  comme pour  $\tilde{V}_C$ ). Par décomposition de Fourier, on montre, dans le cas d'un faisceau gaussien, micro-pulsé à la fréquence  $f_B$ , que [3] :

$$I_B = |\tilde{I}_B| = 2 I_0 e^{-2\pi^2 n^2 f_B^2 \sigma_B^2}$$

où  $I_0$  est le courant moyen transporté par le faisceau\*,  $\sigma_B$  est la largeur temporelle caractéristique du « bunch » gaussien, et où  $n$  est un entier  $\geq 1$  représentant l'harmonique de la fréquence de travail ( $n=f/f_B$ ). Lorsque les « bunchs » sont très courts devant la période faisceau ( $f_B \sigma_B \ll 1$ ), ce que l'on considère ici, l'expression devient simplement  $I_B = 2I_0^\dagger$ .

La phase du courant faisceau, par définition, vaut  $\varphi_B = \pi$ , puisque le faisceau induit un effet décélérateur sur lui-même.

- $\tilde{I}_G$  représente le courant induit dans la cavité par la source de puissance RF à sa fréquence de travail  $f$ . L'amplitude de ce courant est liée à la puissance RF incidente  $P_{inc}$  issue du générateur :

$$I_G = |\tilde{I}_G| = 2 \sqrt{\frac{P_{inc}}{(r/Q) Q_i}}$$

où  $(r/Q)$  représente l'impédance shunt normalisée de la cavité (« linac definition »†).

Sa phase est notée  $\varphi_G$ .

## 1.5 Système à résoudre dans le formalisme I/Q

- L'équation (1) peut se transformer en un système de 2 équations mettant en jeu soit les amplitudes et phases de chaque signal, soit leurs composantes démodulées  $I$  &  $Q$ , très utiles notamment dans le cas d'un système d'asservissement numérique. Dans ce dernier cas, le système à résoudre devient :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dV_{Cl}(t)}{dt} = \frac{\omega (r/Q)}{4} (2I_{Gl}(t) + I_{Bl}(t)) - \frac{\omega}{2 Q_L(t)} (V_{Cl}(t) + \tan \psi(t) V_{CQ}(t)) \\ \frac{dV_{CQ}(t)}{dt} = \frac{\omega (r/Q)}{4} (2I_{GQ}(t) + I_{BQ}(t)) - \frac{\omega}{2 Q_L(t)} (V_{CQ}(t) - \tan \psi(t) V_{Cl}(t)) \\ f_{cav}(t) = f + \Delta f_L(t) + \Delta f_{SAF}(t) + \sum_i \Delta f_{MIC_i}(t) \sin(2\pi f_{MIC_i} t) \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{avec} & V_{Cl} = V_C \cos(\varphi_C) & \text{et} & V_{CQ} = V_C \sin(\varphi_C) \\ & I_{Gl} = I_G \cos(\varphi_G) & \text{et} & I_{GQ} = I_G \sin(\varphi_G) \\ & I_{Bl} = I_B \cos(\varphi_B) = -I_B & \text{et} & I_{BQ} = I_B \sin(\varphi_B) = 0 \end{array}$$

\*  $I_0 = f_B \sum q = I_{pk} \sqrt{2\pi} \sigma_B f_B$ , où  $I_{pk}$  représente le courant crête, et  $\sum q$  la charge totale d'un « bunch »

† On obtient en fait, pour un faisceau de taille rms  $10^\circ$  à 350 MHz,  $I_B = 1.97 I_0$ .

‡  $(r/Q) = \frac{V_C^2}{\omega_{cav} U}$ , à  $\beta$  donné, ne dépend que de la géométrie de la cavité.

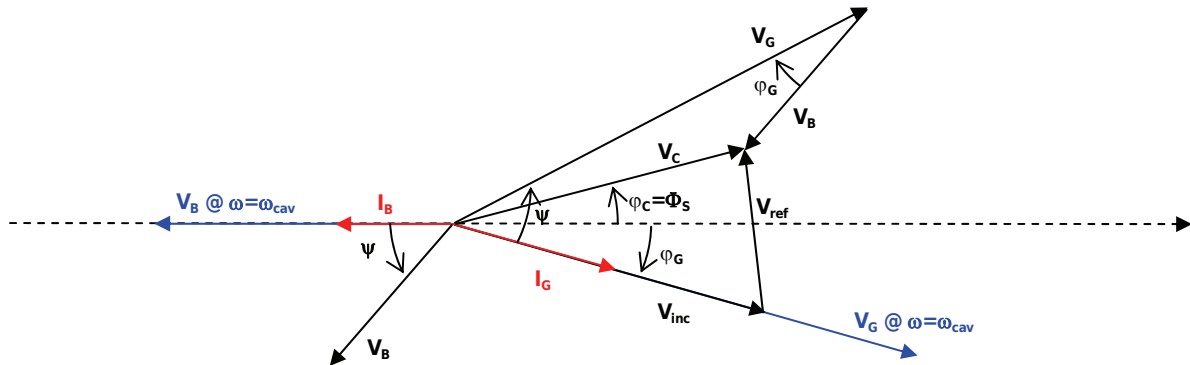
## 2 Résolution du système « cavité couplée »

### 2.1 Tensions en jeu dans la cavité

- La résolution du système (3), permet d'obtenir au cours du temps, et pour un  $\beta$  donné, la tension accélératrice totale  $\tilde{V}_C$  créée dans la cavité.
- Cette tension est la somme de la tension accélératrice créée dans la cavité par le générateur ( $\tilde{V}_G$ , solution de (1) lorsque  $I_B=0$ ), et de la tension accélératrice (en l'occurrence décélétratrice) créée dans la cavité par le faisceau ( $\tilde{V}_B$ , solution de (1) lorsque  $I_G=0$ ).
- Mais  $\tilde{V}_C$  est aussi la somme des tensions incidente  $\tilde{V}_{inc}$  et réfléchi  $\tilde{V}_{ref}$  vues par la cavité ; ces tensions s'expriment sous la forme :

$$\tilde{V}_{inc} = \frac{(r/Q)Q_i}{2} \tilde{I}_G \quad \text{et} \quad \tilde{V}_{ref} = \tilde{V}_C - \tilde{V}_{inc} \quad (4)$$

Ces différentes tensions sont représentées sur la figure ci-dessous.



### 2.2 Tensions vues à l'extérieur de la cavité et bilan de puissance

- Les tensions vues à l'extérieur de la cavité, en jeu dans le système de régulation RF, se déduisent par transformation d'impédance :

- tension incidente :  $\tilde{V}'_{inc} = \sqrt{\frac{2Z_i}{(r/Q)Q_i}} \tilde{V}_{inc}$ , de phase  $\varphi_G$
- tension réfléchi :  $\tilde{V}'_{ref} = \sqrt{\frac{2Z_i}{(r/Q)Q_i}} \tilde{V}_{ref}$ , de phase  $\varphi_{ref}$
- tension transmise :  $\tilde{V}'_{tr} = \sqrt{\frac{2Z_t}{(r/Q)Q_t}} \tilde{V}_C$ , de phase  $\varphi_C$

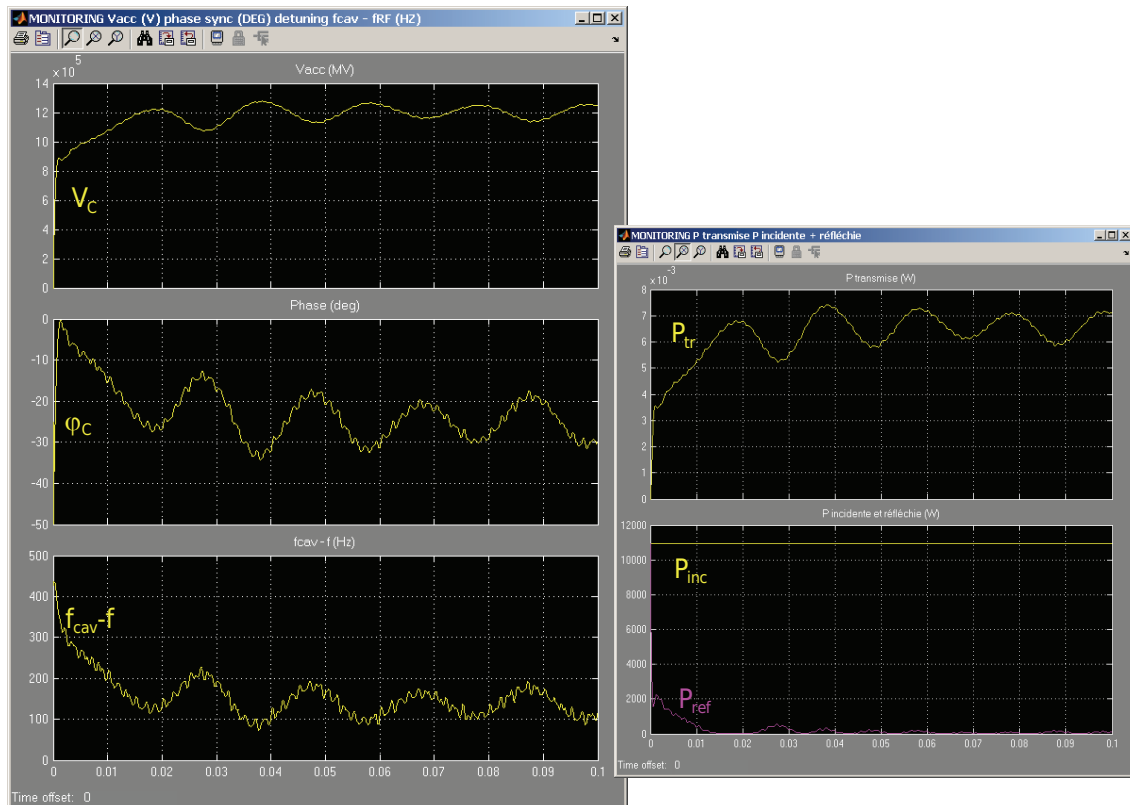
où  $Z_i$  et  $Z_t$  sont respectivement les impédances des lignes incidentes et transmises.



- Les puissances associées valent respectivement :  $P_{inc} = \frac{V_{inc}'^2}{2Z_i}$ ,  $P_{ref} = \frac{V_{ref}'^2}{2Z_i}$  et  $P_{tr} = \frac{V_{tr}'^2}{2Z_t}$ . On a aussi, pour être complet :
  - puissance dissipée dans la cavité :  $P_C = \frac{V_C^2}{(r/Q)Q_0}$
  - puissance fournie au faisceau :  $P_B = \frac{I_B}{2} V_C \cos(\phi_C)$
  - puissance transitoire fournie par la cavité :  $\frac{dU}{dt}$ , où  $U \cong \frac{V_C^2}{(r/Q)\omega}$  : énergie stockée dans la cavité.
  - Par un bilan de puissance, on vérifie bien que  $P_{inc} = P_{ref} + P_{tr} + P_C + P_B + \frac{dU}{dt}$ .

## 2.3 Résolution du système en régime transitoire

- La résolution du système (3) en régime transitoire nécessite le plus souvent une résolution numérique en utilisant des logiciels du type Matematica, Mathcad ou Matlab/Simulink. Les figures ci-dessous donnent l'exemple de la réponse de la tension  $\tilde{V}_C$  (amplitude et phase) et de la fréquence d'une cavité accélératrice « spoke » soumise à partir de  $t=0$  à un faisceau continu et à un courant générateur RF réglé aux conditions optimales de fonctionnement en régime stationnaire. On notera notamment que dans un tel cas de fonctionnement (boucle ouverte), les perturbations de fréquence jouent un rôle prépondérant sur la stabilité du champ accélérateur et de sa phase. Une boucle de régulation équipée d'un PID bien réglé permet généralement, en ajustant en temps réel le signal générateur RF, de limiter ces excursions à moins de 1% et 1°.



## 2.4 Propriétés remarquables du système en régime stationnaire

- En régime stationnaire (i.e. à  $\tilde{V}_C$  constant), la résolution analytique de l'équation (1) montre que, pour créer dans la cavité une tension accélératrice  $V_C$  à une phase  $\varphi_C$ , la puissance incidente et la phase du courant générateur doivent vérifier :

$$\begin{cases} P_{\text{inc}} = \frac{Q_i}{4(r/Q)Q_L^2} (1 + \tan^2 \psi) V_C^2 + \frac{I_B Q_i}{4Q_L} (\cos \varphi_C + \sin \varphi_C \tan \psi) V_C + \frac{(r/Q)Q_i}{16} I_B^2 \\ \tan \varphi_G = \frac{(\sin \varphi_C - \cos \varphi_C \tan \psi) V_C}{\frac{I_B}{2} (r/Q) Q_L + (\cos \varphi_C + \sin \varphi_C \tan \psi) V_C} \end{cases}$$

- De plus, en spécifiant  $\tilde{V}_C = \tilde{V}_{\text{inc}}$  (annulation de la puissance réfléchie), on peut déterminer les conditions optimales de fonctionnement en régime stationnaire. Elles sont données par :

$$\begin{cases} Q_{\text{iOPT}} = \frac{V_C}{\frac{(r/Q)I_B}{2} \cos \varphi_C + V_C \left( \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_t} \right)} \\ \tan \psi_{\text{OPT}} = \left( 1 - \frac{2Q_L}{Q_i} \right) \tan \varphi_C \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad f_{\text{cavOPT}} = f \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_t} - \frac{1}{Q_i} \right) \tan \varphi_C \right)$$

Dans l'approximation  $I_B \approx 2I_0$  et  $Q_i \approx Q_L$ , souvent valable pour les cavités supraconductrices fortement couplées, ces 2 conditions deviennent simplement, en fonction de la phase synchrone  $\Phi_S$  :

$$\begin{cases} Q_{\text{iOPT}} \approx \frac{V_C}{(r/Q)I_0 \cos \Phi_S} \\ \psi_{\text{OPT}} \approx -\Phi_S \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad f_{\text{cavOPT}} \approx f \left( 1 - \frac{\tan \Phi_S}{2Q_{\text{iOPT}}} \right)$$

On obtient alors avec un tel réglage :  $P_{\text{incOPT}} \approx P_B$  et  $\varphi_{\text{GOPT}} \approx \Phi_S$ .

- Enfin, la résolution de l'équation (2) en régime stationnaire donne le detuning optimal que doit assurer le système d'accord à froid par rapport à la fréquence de fonctionnement. Ce detuning doit compenser l'effet « beam loading » décrit ci-dessus, mais aussi l'effet des forces de Lorentz ; il vaut (hors microphonie) :

$$\Delta f_{\text{SAFOPT}} = f_{\text{cavOPT}} - f - \frac{10^{-12} k_L}{L_{\text{acc}}^2} V_C^2 \approx -\frac{f}{2Q_i} \tan \Phi_S - \frac{10^{-12} k_L}{L_{\text{acc}}^2} V_C^2$$

## 2.5 Informations disponibles sur les conditions de fonctionnement

- Grâce à l'acquisition des signaux incidents, réfléchis et transmis, il est possible, d'effectuer un monitoring des différentes puissances, mais aussi de la fréquence de résonance de la cavité (ou de son  $\tan \psi$ ), du couplage incident, et du courant faisceau. La connaissance de ces grandeurs peut permettre de réagir par exemple sur un coupleur variable ou sur le SAF de la cavité pour ajuster et optimiser les conditions de fonctionnement.

- Le couplage peut se déduire à partir de (4) :

$$Q_i = \frac{Z_i}{Z_t} Q_t \left( \frac{V'_t \cos \varphi_C}{V'_{inc} \cos \varphi_G + V'_{ref} \cos \varphi_{ref}} \right)^2$$

- En régime établi (lorsque  $\tilde{V}_C$  est stabilisé), la fréquence de la cavité et le courant faisceau peuvent facilement être dérivés d'après (1) :

$$\begin{cases} \tan \psi = \tan \varphi_C - 2 \frac{Q_L}{Q_i} \frac{V_{inc}}{V_C} \frac{\sin \varphi_G}{\cos \varphi_C} \\ \frac{I_B}{2} (r/Q) = \frac{2V_{inc}}{Q_i} \cos \varphi_G - \frac{V_C}{Q_L} (\cos \varphi_C + \sin \varphi_C \tan \psi) \end{cases}$$

Pour un fonctionnement sans faisceau ( $I_B=0$ ), on obtient simplement :  $\tan \psi = \tan (\varphi_C - \varphi_G)$ .

## Remerciements

A Jean Lesrel, pour ses idées et remarques toujours pertinentes.

## Références

- [1] T. Schilcher, « Vector sum control of pulsed accelerating fields in Lorentz force detuned superconducting cavities », TESLA-report 98-20, Hamburg, 1998.
- [2] A. Mosnier, « Dynamic measurements of the Lorentz forces on a MACSE cavity », DAPNIA-SEA-92-05 et TESLA-report 1993-09, Saclay, 1992.
- [3] J-L. Biarrotte, « Etude de cavités supraconductrices pour les accélérateurs de protons de forte puissance », DAPNIA-SEA-00-01-T, Saclay, 2001.